Teorema da Conservação do Momento Linear
Evolução no tempo de sistemas com corpos de massa variável - Os foguetes espaciais

Prof. Emerson Flamarion da Cruz

1 - Introdução

É pouco provável que alguém nunca se divertiu com o movimento intenso e "desordenado" de um balão , provocado pelo vazamento do ar em seu interior.

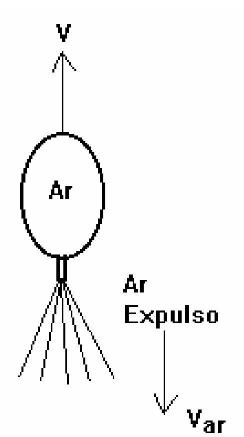
Além de divertido, tal fenômeno é um bom exemplo de sistema em que o Princípio da Conservação do Momento Linear pode ser aplicado. Todavia, o impressionante é que a interpretação Física de tal fenômeno leva a equações de aplicação tecnológica imediata como, por exemplo, nos foguetes que conduzem as naves espaciais !

Sistemas semelhantes aos do balão e foguetes espaciais são singulares na causa de seu movimento : a variação de sua massa , pois, assim como o balão, o foguete tem sua velocidade acrescida proporcionalmente à quantidade de massa de gases (provenientes da queima de combustível) violentamente ejetados .

Desta forma , cabe a questão: como , e quanto, varia a velocidade do corpo com a simultânea variação de sua massa ?

2 - A análise do fenômeno

Buscando uma simplicidade de raciocínio, analisaremos o movimento do balão, e após seu estudo aplicaremos o modelo para o caso do foguete.



A primeira questão que devemos responder é : pode o sistema balão/ar ser considerado como um Sistema Mecanicamente Isolado ?

A resposta é sim ! Pois , similarmente a uma explosão, as *forças internas* ao sistema são muito mais intensas em relação às *forças externas* ao sistema (gravidade e resistência do ar) de modo que podemos considera-las desprezíveis.

Então , se o sistema pode ser considerado mecanicamente isolado, podemos utilizar o Teorema da Conservação do Momento Linear.

$$\vec{\mathbf{Q}}_{\mathbf{inicial}} = \vec{\mathbf{Q}}_{\mathbf{final}}$$

Como consideraremos o movimento em uma única direção, o problema pode ser tratado de forma escalar.

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{inicial}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{final}}$$

Inicialmente, tanto o balão como ar dentro dele confinado estão em repouso, e, em um instante posterior, o balão sofre um acréscimo **dv** na sua velocidade (contrária a ejeção do ar) simultaneamente à um decréscimo **dM** em sua massa.

Então :

$$\mathbf{0 = (M - dm).(dv) - dm.(v_{ar})} \qquad (1)$$

Entretanto , a *velocidade do ar* é justamente a *velocidade de ejeção do ar* (em relação ao balão) diminuída da *velocidade do balão* (em relação ao solo):

$$\mathbf{v_{Ar} = v_{ejeção} - dv_{balão}} \qquad (2)$$

Portanto , combinado (1) com (2) :

$$\mathbf{0 = (M - dm).(dv) - dm.(V_{ejeção} - dv)}$$

O que resulta em :

$$\mathbf{Mdv = dm.v_{ejeção}}$$

Dividindo ambos os termos por **dt** :

$$M\frac{dv}{dt} = \frac{dM}{dt}.v_{ejeção}$$

Separando as variáveis e integrando :

$$\int_{v0}^{v}\frac{dv}{dt}dt = \int_{Mi}^{Mf}\frac{dM}{M}.v_{ejeção}$$

O que resulta em :

$$v - v_0 = - Ln\,\frac{Mi}{Mf}.v_{ejeção}$$

Onde a *velocidade de ejeção do ar* depende do tipo e forma do balão e a massa final à cada instante pode ser obtida conhecendo-se a *razão* **(R)** com que a massa de ar é ejetada no decurso do tempo (também dependente do tipo de balão) , conforme indica a relação :

$$Mf = M - R.t$$

Então a equação que relaciona a velocidade do balão em dado instante em função da variação de sua massa , pode ser expressa assim :

$$\boxed{v = v_0 - (v_{ejeção}) . Ln\,\frac{M}{(M - R.t)}}$$

Onde $v_{ejeção}$, no caso do balão, é sempre contrária à v_0 , sendo, portanto , inerentemente **negativa.** Entretanto, o foguete pode ser utilizado como um dispositivo **retardador** de uma nave , então, o sentido da $v_{ejeção}$ coincide, *inicialmente*, com v_0. Desta forma, é de essencial importância a definição do sentido da velocidade de ejeção em relação à velocidade inicial do corpo.

Analisando a equação acima fica compreensível a vantagem de se construir um foguete de múltiplos estágios, pois com a gradativa redução do denominador do argumento do logaritmo natural, o termo $\mathbf{Ln}\dfrac{\mathbf{M}}{(\mathbf{M} - \mathbf{R.t})}$ aumenta, colaborando, assim, para o acréscimo na velocidade final do foguete.

É importante recordar que $\mathbf{R}$ e $\mathbf{v}_{\mathbf{ejeção}}$ são *funções* de outras variáveis ,como pressão e temperatura, que não foram objeto de estudo desse trabalho . O modelo desenvolvido, nada mais é do que uma "roupagem" para um modelo mais geral. Assim sendo, fica o incentivo ao estudo de um modelo que expresse $\mathbf{R}$ e $\mathbf{v}_{\mathbf{ejeção}}$ de forma mais completa enriquecendo, assim, o modelo proposto neste estudo.

3 - Bibliografia

HALLIDAY, D. , RESNICK, R. , **Fundamentos de Física**, vol. 1 , Editora LTC, Rio de Janeiro - R.J. - 1991

SYMON,K. , **Mecânica,** Editora Campus, Rio de Janeiro - RJ - 1982

TIPLER, P.A., **Física** , vol. 1 , Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro - R.J. - 1984.