

Gravitação Universal

Prof. Emerson F. Cruz

Os céu e seus segredos

Desde os seus primórdios o Homem dirige seu olhar para os céus em buscas de respostas. As perguntas perduram até hoje: Quem somos? Qual o nosso papel e lugar no Universo? Ou até mesmo: O que é o Universo e qual sua origem?

Com relação ao Universo, se sabia que as respostas estavam ligadas ao entendimento da **Dinâmica Celeste**. E, desde então, desenvolveu-se vários **modelos astronômicos** fundamentados nas observações do comportamento dos astros vistos da Terra. Inicialmente acreditava-se que a Terra era o centro do universo, com todos os outros planetas, inclusive o Sol, se movendo em órbitas circulares, e no mesmo plano, em torno de nosso planeta, tal sistema é denominado **geocêntrico**. Este modelo, proposto pelo astrônomo **Claudio Ptolomeu** (90-168), (daí o nome **sistema ptolomaico**), no século II de nossa era, reinou absoluto durante praticamente 13 séculos devido a sua grande precisão na predição dos movimento dos astros, a menos de Marte, observados na época.

No início da **renascença Nicolau Copérnico** (1473-1543), revolucionou a astronomia propondo um sistema solar **heliocêntrico**, isto é, um sistema com os planetas orbitando o Sol que agora ocupa o centro do sistema. Infelizmente, tal sistema



Nicolau Copérnico

contrariava as idéias da Igreja católica da época e seu livro *De revolutionibus orbium coelestium* (Sobre as revoluções das órbitas celestes) acabou por incrementar

a extensa lista dos livros proibidos pela Igreja.

Kepler - O matemático errante

O modelo proposto por Copérnico, embora condenado e proibido, ganhou mais e mais adeptos, entre eles : **Galileu Galilei** (1564-1642) e **Johannes Kepler** (1571-1630).

Kepler foi um matemático genial, que após quase duas décadas de estudo dos dados astronômicos legados por **Ticho Brahe** (1546-



Johannes Kepler

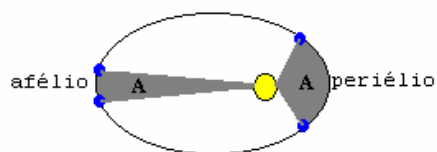
1601), enuncia três leis, fundamentadas no sistema heliocêntrico, que descrevem com notável precisão os movimentos dos planetas, inclusive Marte. As três leis, conhecidas como **Leis de Kepler** são:

I - Lei das Órbitas

Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com este ocupando um de seus focos

II - Lei das Áreas

O segmento de reta que liga o Sol ao planeta, varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais



Esta lei implica que o planeta possui maior velocidade quando está próximo ao Sol (periélio) e menor velocidade quando mais distante do Sol (afélio)

III - Lei dos períodos

O quadrado do período de revolução de um planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo da distância média do planeta ao Sol

$$T^2 = \kappa R^3$$

Onde κ é uma constante válida para todos os planetas do sistema solar.

Kepler deu um grande passo na compreensão do movimento dos planetas, mas suas leis apenas *descreviam* tais movimentos. Era necessário, agora, entender como as órbitas eram mantidas por determinação do Sol, ou seja, como os astros *interagem*. A construção da dinâmica celeste estava finalmente a um passo de ser elaborada. Mas era necessário o passo de um gênio: **Newton**.

O Universo e a maçã

Sir Isaac Newton (1642-1727), nasceu no interior da Inglaterra, Woolsthorpe, no ano em que morria **Galileu Galilei**. Ingressou na Universidade de Cambridge, formando-se bacharel em 1665. Neste mesmo ano



**Isaac
Newton**

uma epidemia de peste bubônica (a peste negra) forçou-o a retornar para casa, período que estudou intensamente vários assuntos que o tornariam famoso até hoje: a *Teoria corpuscular da luz*, *As leis dos movimentos* e a *gravitação*.

Em 1667 retorna a Cambridge e doutora-se no ano seguinte. Em 1669 o professor **Isaac Barrow** renuncia às suas funções acadêmicas e nomeia **Newton** como seu sucessor. Desta

forma, aos 26 anos **Isaac Newton** já era catedrático.

De temperamento difícil, **Newton** progrediu praticamente sozinho. Fortemente avesso às críticas de seus contemporâneos, era extremamente reticente em publicar seus estudos, o que causou a indigesta disputa pela autoria do **Cálculo Diferencial** com o grande matemático **Leibniz (1646-1716)**.

Aliás, o **Cálculo** foi a chave para o desenvolvimento da **Dinâmica** dos movimentos. Sem ele o entendimento completo dos movimentos não seria possível.

No período em que **Newton** fugia da peste negra, diz a lenda que ao observar a queda de uma maçã de sua árvore, o gênio teve um *insight* de *como funciona* a dinâmica celeste. Não há indícios de que a estória seja história, mas as conseqüências dela não são contos de fada e nos levou até a Lua na década de 60 do século XX !

A idéia principal reside no conceito de *ação à distância*, ou seja, dois corpos de massas M_1 e M_2 , respectivamente, separados por uma distância r se *atraem* mutuamente de acordo com a expressão :

$$F_g = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

Onde **G** é denominada *constante da gravitação universal* e foi obtida experimentalmente muito mais tarde por **Cavendish (1731-1810)** ($G = 6,67 \times 10^{-11} \text{N.m}^2/\text{kg}^2$).

O conceito de *ação a distância* não foi bem aceito de início, pois o que conectava os corpos interagentes ? Isso somado ao fato de não verificarmos massas atraindo massas no cotidiano, fez com que a Teoria da Gravitação Universal proposta por **Newton**, colecionasse poucos seguidores em seu início.

No entanto, ela tinha um trunfo inquestionável : as leis de Kepler.

Através da lei de atração entre massas proporcional ao inverso do quadrado da distância entre elas, proporcionava as famosas leis de Kepler, obtidas empiricamente. Ou seja, no mínimo a teoria de Newton estava em sintonia com o experimento, com a Natureza.

Faltava uma demonstração categórica, algo irrefutável que casasse teoria e experimento de modo inquestionável.

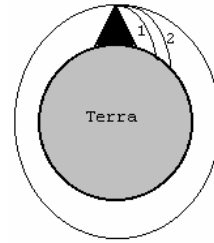
Um vigésimo de polegada

De acordo com a lei de Newton para a gravitação, todos os corpos se atraem, assim a maçã cai da árvore porque é atraída em direção ao centro da Terra como todos os outros corpos em sua superfície.

No entanto a lei da gravitação deve valer para todos os corpos que possuem massa, inclusive a Lua. Mas esta parece flutuar ao redor da Terra, uma vez que não cai em nossa direção.

O ponto crucial é este: ela cai! Newton explica.

Imagine que do alto de uma montanha você jogue um objeto, uma pedrinha, com determinado impulso. Considerando o movimento sob ação exclusiva da gravidade, a pedrinha descreverá uma trajetória parabólica (1), como previu **Galileu**, até finalmente atingir o solo. Agora, aplicando um impulso maior, a pedrinha terá um alcance maior (2). Se prosseguirmos o raciocínio, chegará o momento em que, ao ser arremessada com determinado impulso a pedrinha retornará ao ponto de partida e, por continuidade, repetirá o movimento de queda eterna. A pedrinha estará em órbita ao redor da Terra (3).

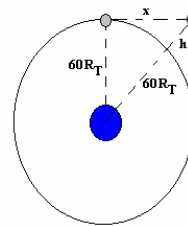


Desta forma, assim como a pedrinha, a Lua está em órbita ao redor da Terra.

Neste ponto Newton questionou : se a Lua está em regime de queda eterna, quanto ela cai, em direção a Terra em um segundo ?

Para responder a esta pergunta **Newton**, considerou a atração exercida sobre a Lua pela Terra muito maior que a exercida pelo Sol, isolando o sistema Terra-Lua do restante do sistema solar. O que faz sentido, pois a Terra está muito mais próxima da Lua do que o Sol e de acordo com a lei da gravitação universal a atração gravitacional é inversamente proporcional à distância entre os corpos.

Assim, consideremos o esquema abaixo :



Onde **h** é a distância que a Lua cai em direção ao centro da Terra em 1 segundo.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos :

$$(60R_T + h)^2 = (60R_T)^2 + x^2$$

Desenvolvendo-se a expressão e considerando o termo h^2 desprezível, obtemos :

$$h = \frac{x^2}{120R_T}$$

Onde x pode ser considerada a distância que a Lua percorreria, por Inércia, caso não estivesse sob ação da gravidade exercida pela Terra.

Logo :

$$x = v_{\text{Translação}} \cdot \Delta t$$

Lembrando que, do **M.C.U.**

$$v = \omega \cdot \text{raio}$$

Temos

$$x = \left(\frac{2\pi}{27 \text{ dias}} \right) \cdot 60R_T \cdot (1 \text{ seg})$$

Acertando as unidades e adotando o raio da terra como $6 \times 10^6 \text{ m}$ (um valor razoável para a época), obtemos :

$$x \cong 9,7 \cdot 10^4 \text{ cm}$$

O que proporciona :

$$h \cong 0,13 \text{ cm} \cong \frac{1}{20} \text{ de polegada}$$

Ou seja, a Lua cai 1/20 de polegada a cada segundo em direção ao centro da Terra, porém como há a componente tangencial da velocidade, o movimento resultante é o circular.

Será que a Lei da gravitação universal de Newton fornece este valor ?

Newton calculou-o.

Na superfície da Terra, todos os corpos caem com a mesma aceleração g . Então, combinando a segunda lei de Newton (Princípio Fundamental da Dinâmica) com a lei da gravitação universal, obtemos :

$$m_{\text{corpo}} \cdot g_{\text{sup}} = G \frac{m_{\text{corpo}} \cdot M_{\text{Terra}}}{R_{\text{Terra}}^2}$$

$$g_{\text{sup}} = G \frac{M_{\text{Terra}}}{R_{\text{Terra}}^2}$$

e valeu-se da informação de que os antigos astrônomos gregos estimaram a distância entre a Terra e a Lua como sendo de, aproximadamente 60 vezes maior que o raio da Terra.

$$g_{\text{Lua}} = G \frac{M_{\text{Terra}}}{(60 \cdot R_{\text{Terra}})^2}$$

$$\frac{g_{\text{Lua}}}{g_{\text{sup}}} = \frac{1}{3600}$$

Assim, comparando os deslocamentos de corpos em queda livre e sabendo que na superfície da Terra um corpo abandonado sob ação exclusiva da gravidade, cai 490cm no primeiro segundo de queda, obtemos :

$$\frac{\Delta S_{\text{Lua}}}{\Delta S_{\text{sup}}} = \left(\frac{\frac{g_{\text{Lua}}}{2} t^2}{\frac{g_{\text{sup}}}{2} t^2} \right) = \frac{1}{3600}$$

$$\Delta S_{\text{Lua}} \cong \frac{490}{3600} \cong 0,136 \text{ cm}$$

$$\Delta S_{\text{Lua}} \cong \frac{0,136}{2,54} \cong \frac{1}{20} \text{ de polegada}$$

Ou seja, a Lei da Gravitação Universal concorda com o observado! A Teoria funciona!

Em 1969 Edwin Aldrin deu o primeiro passo humano na Lua. No entanto o primeiro passo dado rumo a Lua, foi seguramente muito menor e de alcance muito superior. Um passo de um vigésimo de polegada, dado por um gigante da Ciência.